TEORIA JOCURILOR

Introducere în teoriei jocurilor

Preocupatã de problema cuantificãrii economice si de exprimarea cât mai riguroasa a relatiilor dintre ele, scoala marginalista din cadrul gândirii economice a adus contributii la îmbogatirea instrumentului analitic în acest domeniu si a îmbogatit considerabil problematica stiintei economice, imprimându-i o pronuntata nota de modernitate.

Importanta cunoasterii mecanismelor pietei, a relatiilor dintre pret si celelalte variabile economice, este în general recunoscuts atât la nivel microeconomic cât si la nivel macroeconomic. Agentul economic (denumit jucãtor în termenii teoriei jocurilor) fie cã este vânzãtor, fie ca este producator trebuie sa îsi defineascã un comportament si sa-si formuleze strategiile de actiune viitoare. Astfel, este evidenta preocuparea firmelor de a elabora strategii avantajoase, care de cele mai multe ori se reduc la jocul de pret.

Modelele economice si practica modelarii economico-matematice au constituit un excelent instrument pentru studierea jocurilor cu caracter economic, stimulând cercetarea în acest domeniu. În ultimul deceniu o serie de metode de modelare din teoria matematicã, dar si economicã au fost utilizate pentru a studia evolutia unor parametrii de stare din domeniul social- economic. Astfel, clasa de sisteme intens studiate în dinamica economicã sunt cele care modeleaza ciclul de afaceri, modelele de crestere economicã precum si modelele de care studiazã jocul preturilor într-o perspectiva dinamicã. In ultimul deceniu s-au evidentiat si evolutii cvasiperiodice în cadrul modelelor economice precum si comportament haotic. Astfel, s-a rãsturnat conceptia dominanta în stiinta economicã si anume ca echilibrele economice sunt stabile si în absenta socurilor externe, economia tinde spre o stare stationarã.

Teoria jocurilor studiaza comportamentul uman în situatii conflictuale, în care ratiunea se opune ratiunii, fiecare din partile implicate având putere de analiza si posibilitatea de a lua decizii în scopul atingerii propriului obiectiv. Ea marcheazã semnificatia ipotezei de rationalitate atunci când satisfactia individului este în mod direct afectatã de deciziile celorlalti agenti si def'meste solutii pentru diferite situatii conflictuale. Teoria jocurilor reprezinta o metoda a cercetarii situatiilor de interactiune strategicã, în care agentii economici sunt constienti de interdependenta ce exisui litre ei iar flecare va adopta propriile decizii tinând cont de comportamentele celorlalti.

Aparitia teoriei jocurilor este istoriceste legatã de anul 1944 când matematicianul John von Neumann si economistul Oskar Morgenstern publica celebra lucrarea: Theory of Games and Economic Behaviour. Aparitia acestei lucrari a constituit primul model matematic care includea omul ca fiinta rationalã. Dupa ce a depasit perioada de maturizare, marcatã de lucrarile lui J.F. Nash (1951), R.D. Luce si H. Raiffa (1957), L. Shapley (1953), teoria jocurilor devine la sfârsitul anilor '80 un puternic instrument de analiza a situatiilor de interactiune strategiea, prezentat ca atare în lucrarile lui J.W. Friedmann (1986), D.M. Kreps (1990), D. Fundenberg si J. Tirole(1991), A. Mass-Colell (1995) si P. Cahuc (1998). Desi teoria jocurilor este relativ recenta, teoria economica mentioneazã si alte studii care an explicat într-o maniera izolatã aceasta problematicã.

Augustin Cournot studia în anul 1838 functionarea pietelor oligopoliste în care fiecare firma actioneaza stiind cã volumul sau de productie influenteaza pretul pietei. El definea echilibrul ca o situatie în care fiecare firma alege productia care sa-i maximizeze profitul, dar tinând cont de productia anuntata de celelalte firme, demonstrând ca un astfel de echilibru conduce la un pret superior productivitatii marginale.

In anul1833 J.Bertrand studia functionarea pietelor oligopolistice în care firmele ale cãror randamente sunt constante produc acelasi bun fiecare determinând pretul de vânzare. Rezultatul enuntat de Bertrand este cunoscut sub numele de paradoxul Bertrand: dacã în situatia de echilibrul fiecare firmã alege pretul care sa-i maximizeze profitul considerând date preturile propuse de celelalte firme atunci pretul de echilibru este egal cu costul marginal. Dacã o firmã fixeazã un pret superior costului marginal si realizeaza un profit pozitiv atunci o alta firma poate atrage de partea ei întreaga clientela propunând un pret mai mic. În consecinta punctul de echilibru va corespunde unui pret egal cu costul marginal.

In anul 1934 Stackelberg arata ca anumite firme pot avea un rol de leader si sunt capabile sa impuna pretul celorlalte firme. Firma leader, ca firmã barometru, cunoaste cel mai bine starea pietei si dispune de mijloacele necesare pentru a-si domina adversarii. Ea nu este neaparat cea mai puternicã , dar este cea mai bine informatã si organizatã. Firma leader poate sa obtina supraprofit atât pe perioadã scurta cât si pe perioadã lunga, fapt ce o apropie de situatia de monopol. Dar ea nu controleazã întreaga piata, profitul suplimentar încasat este mai redus decât el crede ca ar putea fi obtinut de monopol.

Se pune întrebarea urmatoare: Care din comportamentele de mai sus ar trebui urmat? Pentru a rãspunde la aceasta întrebare era nevoie de o teorie care sã reprezinte interactiunile dintre firme. Aceasta este marele aport al teoriei jocurilor. Ea permite elaborarea unui cadru analitic de analiza a situatiilor în care deciziile unui agent pot afecta câstigurile celorlalti agenti.

Teoria jocurilor studiazã modalitatea în care indivizii rationali actioneaza situatiile conflictuale. Ea marcheazã semnificatia ipotezei de rationalitate atunci când satisfactia indivídului este în mod direct afectatã de deciziile celorlalti agenti si defineste solutii pentru diferite situatii conflictuale. Din acest motiv cunoasterea instrumentelor de analiza ale acestei teorii este azi indispensabila, teoria jocurilor constituind o veritabila matrice a teoriei economice contemporane.

Una din motivatiile filozofice ale teoriei jocurilor este cea legatã de faptul ca indivizii pentru a putea trai într-o ordine socialã, trebuie sa se supunã, ca o necesitate naturalã unui suveran. Teoria jocurilor vine sa întareascã aceasta afirmatie prin conceptul de functie de utilitate care presupune maximizarea avantajelor unui agent constient, fie el ca individ sau ca un grup de indivizi, considerat ca fiind într-un potential conflict cu un agent denumit Natura. Ne situãm, astfel în modelul tipic al unui joc în care fiecare dintre cei doi adversari alege si foloseste o anumita strategie pentru a atinge scopurile propuse.

Situatii de conflict au existat din totdeauna, studiul lor matematic a aparut relativ recent. Primele situatii conflictuale au fost analizate cu ajutorul matematicii în secolul al XVII-lea si au avut ca obiect jocurile de noroc. Aceste analize facute de matematicieni celebri cum sunt Pascal, Fermat, Jaques si Daniel Bernoulli nu au condus însa la fundamentarea teoriei jocurilor, ci mai mult la calculul probabilitatilor. Desi initial teoria jocurilor a fost conceputã pentru a rãspunde unei curiozitati a matematicii si anume la originea acestei teorii aflându-se dorinta de a gasi o solutie teoreticã la problemele, puse în conditii de incertitudine, a jocurilor de noroc, nimic nu ar fi predispus atunci aceasta bransa a matematicii la o întâlnire eu economia. In prezent, teoria jocurilor face obiectul unor cercetari de marcã, atragând de partea ei economisti si matematicieni de prestigiu. În ultimele doua decenii au fost analizate jocurile dinamice de tipul rent-seeking (pentru partajarea avutiei). Un studiu sistematic al existentei punctului de echilibru pentru aceste tipuri de jocuri a fost efectuat de cãtre Okuguchi K. si Szidarovsky F. care au aratat cã aceste jocuri sunt echivalente eu oligopolul de tip Cournot cu functie de pret de tip hiperbolã.

Sintetizând cele prezentate mai sus, de la începutul secolul al XX-lea în evolutia teoriei jocurilor s-au identificat trei etape de evolutie:

1) perioada care a început din anii '20 pânã la sfârsitul celui de al doilea razboi mondial. In aceasta perioada s-au elaborat jocurile strategice si extensiuni ale lor, jocurile de tactica militara, în special cele cu sumã nula. Accentul cade pe cercetarile strategice care servesc în mod optimal în scopul desemnarii solutiilor posibile ale acestor jocuri;

2) perioada care începe odatã cu aparitia lucrarii lui John von Neumann si Oskar Morgenstern ,,Theory of Games and Economic Behaviour" (1944) si care tine pânã la sfârsitul anilor '70. Preocuparea este centratã pe teoria jocurilor cooperative care acorda un mare interes coalitiilor ce pot sa se formeze între indivizii rationali cu scopul de a-si maximiza câstigurile lor;

3) perioada în care ne situãm, în prezent, în care un loc central este acordat atât jocurilor non-cooperative cu echilibrul Nash considerat ca solutie privilegiatã cât si jocurilor dinamice.

Teoria jocurilor poate fi abordatã ca :

-“teoria deciziilor interactive”, având ca obiect analiza comportamentului unor decidenţi independenţi („jucători”), ale căror decizii se influenţează reciproc;

- cadru teoretic pentru a analiza comportamentului strategic al unui număr relativ mic de participanţi care acţionează direct, nu prin intermediul unor mecanisme “impersonale” de intermediere (piaţa).
Cu toate acestea, domeniul se deosebeşte de contextul teoriei deciziei, în care decidentul acţionează în raport cu “natura” (într-un context noninteractiv).
Teoria jocurilor urmăreşte determinarea strategiilor care maximizează o anumită funcţie de utilitate (maximizarea utilităţii estimate, minimizarea riscurilor)
Prin *soluţie a unui joc* se înţelege determinarea celei mai bune strategii pentru fiecare jucător în raport cu o funcţie specificată
Dacă fiecare jucător cunoaşte exact ce va face celălalt, avem o situaţie deterministă şi funcţia de maximizat este utilitatea; dacă pot fi estimate probabilităţile rezultatelor posibile, atunci obiectivul devine maximizarea valorii estimate a utilităţii.
Concepte utilizate:
A. Jocurile
Jocurile reprezintă modele de interacţiune între agenţi raţionali cu interese şi obiective distincte (şi uneori conflictuale)
Cuprind:
1. jucători (agenţi),
2. *strategii* (procedura de selectare a mutărilor),
3. *combinaţii de strategii,*
4. *beneficii* asociate fiecărei combinaţii,
5. *preferinţe* (ierarhizarea utilităţilor asociate fiecărui rezultat posibil)

B. Abordare strategică
Strategie a unui jucător: planul complet de joc, pentru orice situaţie posibilă; “algoritmul” aplicat în alegerea mutărilor
Profil strategic (sau combinaţie de strategii) – setul de strategii alese de fiecare jucător în parte strategie / mutare

C. Raţionalitate
Analiza interacţiunilor strategice este imposibilă dacă nu asumăm faptul că participanţii se vor supune aceloraşi *constrângeri raţionale* (de exemplu, că nu vor selecta strategii auto-distructive sau că nu vor prefera simultan x şi non-x).
Odată ce adoptăm această presupoziţie, mecanismele lor de decizie devin transparente (deşi în nici un caz complet predictibile): pot fi evaluate strategiile lor posibile şi rezultatele aplicării fiecăreia.

D. Soluţii
Rezultatul interacţiunii depinde de alegerile făcute de fiecare decident în parte. Nu există posibilitatea aplicării unei strategii optime *predeterminate*, independent de acţiunile celorlalţi, pentru că alegerile lor influenţează şi modifică continuu contextul deciziei.
Tipuri de soluţii:
Optimizarea paretiană
Eliminarea strategiilor dominate
Echilibrul Nash
Inducţia progresivă
Inducţia regresivă

E. Utilitatea
Este definită în raport cu obiectivele şi consecinţele deciziilor noastre şi reprezintă o măsură a satisfacţiei (bucuriei, plăcerii, mulţumirii etc.) oferite de rezultatul deciziilor luate. Deci, utilitatea este o variabilă măsurabilă (cuantificată sau estimată). Există numeroase probleme legate de modul în care indivizii pot compara utilităţi de tipuri diferite, sau de modul în care pot fi comparate utilităţile mai multor indivizi.

Utilitate transferabilă şi netransferabilă
Transferabilă: un jucător poate transfera o parte a propriei utilităţi către ceilalţi
ν presupune faptul că utilităţile individuale pot fi reprezentate pe o scală comună (ex. utilizarea unei monede comune);
atenţie: simplul transfer al unor sume fixe nu garantează transferabilitatea utilităţilor, pentru că sumele respective pot avea utilităţi diferite pentru jucători diferiţi
ν utilitatea transferabilă e caracteristică jocurilor coaliţionale, în care se presupune că fiecare jucător beneficiază de aceeaşi utilitate, indiferent de modul de distribuire a utilităţilor în cadrul coaliţiei
Tipuri de jocuri
În funcţie de:
1. modul de distribuire a beneficiilor:
- jocuri cu sumă nulă (beneficii totale fixe; pierderile unora sunt câştigurile celorlalţi)
- jocuri cu sumă non-constantă (pozitivă).

2. informaţia disponibilă:
- jocuri cu informaţie ***perfectă/imperfectă*** informaţia *imperfectă* presupune o cunoaştere parţială a "mutărilor" făcute de ceilalţi participanţi (a "istoriei" jocului respectiv).
- jocuri cu informaţie ***completă/incompletă*** informaţia *incompletă* caracterizează acele situaţii de decizie în care agenţii nu posedă informaţii complete cu privire la toţi parametrii care caracterizează situaţia respectivă ("regulile jocului").

3. tipul de interacţiune:
- jocuri *non-cooperative* – regulile sale interzic alegerea în comun a strategiilor şi transferul utilităţilor între jucători (plăţile laterale) – imposibilitatea coordonării strategiilor
- jocuri *cooperative* (coaliţionale).

4. tipul de interacţiune:
- strategice (mişcările se fac simultan)
- secvenţiale (dinamice)
discuţie: *iterated prisoners dilemma*

5. strategiile adoptate:
- pure (se alege o singură strategie
- mixte (se aleg două sau mai multe strategii potrivit unei distribuţii de probabilităţi)

Cercetarile si rezultatele din teoria jocurilor au sedus practic majoritatea sectoarelor de analiza economicã. Este cazul economiei industriale care se regãseste printre cele mai recente aplicatii ale teoriei jocurilor. Economia asigurarilor, economia monetara si financiara precum si o parte din economia internationalã, reprezinta domenii noi de aplicare a teoriei jocurilor.

In prezent, teoria jocurilor ocupa un loc în teoria si practica economica, fiind în prezent un principal instrument de analiza al noii microeconomii.

Teoria jocurilor şi-a găsit numeroase aplicaţii în domeniul ştiinţelor sociale, inclusiv, sau, poate, mai ales în domeniul economiei. Aceasta utilizează trei ipoteze fundamentale: jucătorii se comportă raţional, fiecare jucător ştie că ceilalţi sunt raţionali şi toţi jucătorii cunosc regulile jocului.

Un jucător este *raţional* dacă va căuta să-şi maximizeze satisfacţia în raport cu ceilalţi jucători.

Vom numi *strategie* a unui jucător, o acţiune realizabilă (posibilă), pe care jucătorul o poate alege în cadrul jocului. Mulţimea strategiilor jocului este dată de mulţimea strategiilor tuturor jucătorilor.

Vom nota mulţimea strategiilor jocului astfel: $S = S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n$,, unde *n* este numărul de jucători, iar S_i reprezinta strategia adoptata de jucatorul *i*. În unele situaţii, *natura* (hazardul) este al *(n + 1)* -lea jucător.

Numim *funcţie de câştig* a jocului funcţia $u = (u_1, u_2, \ldots u_n)$, formată din funcţiile de câştig ale fiecărui jucător. Notând funcţia de câştig a fiecărui jucător u_i şi funcţiile de câştig ale celorlalţi jucători u_{-i}, funcţia de câştig a jocului va fi: $u : S \rightarrow R,\ u = (u_i, u_{-i})$.

Numim strategie optimală acea strategie care maximizează câştigul jucătorului *i*, indiferent de strategiile alese de ceilalţi jucători.

Echilibrul Nash (care a preluat numele celui care l-a definit – John Nash) este o mulţime de strategii $(s_1^*, s_2^*, \ldots, s_n^*)$ care respecta condiţia:

$$u_i\,(s_1^*, s_2^*, \ldots, s_i^*, \ldots, s_n^*) \geq u_i\,(s_1^*, s_2^*, \ldots, s_i, \ldots, s_n^*),\ \forall\ i = 1, n$$

Clasificarea jocurilor

a. în raport cu modul în care comunică jucători între ei avem:
- jocuri cooperative;
- jocuri necooperative.

Jocurile cooperative sunt acele jocuri în care jucătorii comunică liber între ei înainte de luarea deciziilor şi pot face promisiuni (care vor fi respectate) înainte de alegerea strategiilor.

Jocurile necooperative sunt jocurile în care jucătorii nu comunică între ei înainte de luarea deciziilor.

b. în raport cu desfăşurarea în timp a jocurilor:
- jocuri statice
- jocuri dinamice

Jocul static este acel joc în care deciziile jucătorilor se iau simultan, după care jocul ia sfârşit.

Jocul dinamic este acel joc în care deciziile jucătorilor sunt secvenţiale, adică sunt succesive în timp.

c. în raport cu natura informaţiei:
- jocuri în informaţie completă
- jocuri în informaţie incompletă

Jocul în informaţie completa este acel joc în care toţi jucători cunosc numărul celorlalţi jucători, strategiile precum şi funcţiile de câştig ale fiecăruia.

Jocul în informaţie incompleta este jocul în care cel puţin unul dintre jucători nu cunoaşte una sau mai multe funcţii de câştig ale celorlalţi jucători, restul elementelor (numărul celorlalţi jucători şi strategiile fiecăruia) fiind cunoscute.

d. în cazul jocurilor dinamice, în raport cu tipul informaţiei:
- jocuri în informaţie perfectă
- jocuri în informaţie imperfectă

Jocul dinamic în informaţie perfectă este jocul dinamic în care fiecare dintre jucători cunoaşte regulile, numărul jucătorilor, strategiile acestora, precum şi evoluţia în timp a jocului (istoria jocului).

Jocul dinamic în informaţie imperfectă este jocul dinamic în care măcar unul dintre jucători nu cunoaşte istoria jocului, cunoscând celelalte elemente.

Strategiile dominate

În jocul sub forma normală G={S_1, S_2, …S_n; u_1, u_2,…, u_n}, fie s_i ′ şi \s_i″ două strategii realizabile pentru jucătorul i (s_i′, s_i″∈ S_i). Vom spune că strategia s_i′ este strict dominată (dominată) de strategias_i″ , dacă oricare ar fi combinaţia de strategii realizabile ale celorlalţi jucători, câştigul jucătorului *i*, dacă joaca s_i′ este strict mai mic (respectiv mai mic sau egal) decât câştigul pe care îl are jucând s_i″ :

$$u_i\ (s_1,\ldots,s_{i-1},s_i{}',s_{i+1},\ldots,s_n) < u_i\ (s_1,\ldots,s_{i-1},s_i{}'',s_{i+1},\ldots,s_n)$$

(sau $u_i\ (s_i', s_{-i}) \leq u_i\ (s_i'', s_{-i})$), cu $s_{-i} \in S_1 \times S_2 \times \ldots S_{i-1} \times \ldots \times S_n$

Se presupune că jucătorii raţionali (vom înţelege prin jucător raţional acel jucător care urmăreşte întotdeauna maximizarea câştigului propriu în funcţie de alegerea strategiilor de către ceilalţi jucători) nu vor alege niciodată să joace o strategie dominată.

Echilibrul lui Nash

În teoria jocurilor, echilibrul Nash (denumit după John Forbes Nash, care l-a publicat) este un exemplu de soluţie-concept a unui joc cu 2 sau mai mulţi jucători, unde nici un jucător nu are nimic de căştigat schimbănd doar strategia sa unilateral. Dacă fiecare jucător a ales o strategie şi nici un jucător nu are de caştigat dacă îşi schimbă strategia în timp ce ceilalţi jucători nu o fac, atunci acest set de strategii de alegere şi căştiguri constituie un echilibru Nash.

În jocul sub forma normală G={S_1, S_2, …S_n; u_1, u_2,…, u_n}, strategiile pure (s_1*,…,s_n*) constituie un echilibru Nash daca pentru fiecare jucator i, s_i * este cel mai bun raspuns la strategiile celorlalti (n − 1) jucatori (s_1 *,…, s_{i-1}*, s_{i+1} *,…, s_n*), adica:

$$u_i\ (s_1{}^*,\ldots,s_{i-1}{}^*,s_i{}^*,\ s_{i+1}{}^*,\ldots,s_n{}^*) \geq u_i\ (s_1{}^*,\ldots,s_{i-1}{}^*,s_i,\ s_{i+1}{}^*,\ldots,s_n{}^*),$$

$\forall s_i \in S_i$ sau

s_i* va fi solutia problemei: $\boldsymbol{max}\ u_i\ (s_1{}^*,\ldots,s_{i-1}{}^*,s_i,s_{i+1}{}^*,\ldots,s_n{}^*),\ s_i \in S_i$.

Determinarea echilibrului prin algoritmul eliminarii strategiilor dominate

Vom descrie algoritmul pornind de la următorul exemplu: fie un joc static sub formă normală definit prin matricea jocului din figura de mai jos:

	Jucatorul 2: Stanga	Mijloc	Dreapta	
Jucator 1	2,1	2,3	1,2	Sus
	1,4	1,2	3,1	Jos

În prima etapă a algoritmului vom căuta să descoperim dacă există vreo strategie dominată pentru unul din jucători:

Pentru jucătorul 1, observăm că strategia „Sus” nu domină strategia „Jos” (deoarece avem 2 > 1 dacă jucătorul 2 joacă *Stânga*; 2 > 1 dacă jucătorul 2 joacă *Mijloc,* dar 1 < 3, dacă jucătorul 2 joacă *Dreapta*).

Pentru jucătorul 2 avem: strategia *Mijloc* nu domină strategia *Stânga* (3 > 1, dar 2 < 4), în schimb domină strategia *Dreapta* (3 > 2 ; 2 > 1). Deci pentru jucătorul 2 este mai convenabil – indiferent de ceea ce ar juca primul jucător – să joace *Mijloc* decât *Dreapta*. Prin urmare, vom elimina strategia (sau strategiile – în cazul în care sunt mai multe) dominată, iar noua matrice a jocului va fi :

		Jucatorul 2		
		Stanga	Mijloc	
Jucator 1		2,1	2,3	Sus
		1,4	1,2	Jos

Pentru acest nou joc analizăm care sunt posibilităţile de alegere pentru jucătorul 1 (reluăm algoritmul).Vedem că în acest caz strategia *Sus* domină strategia *Jos* (2 > 1 ; 2 > 1), pe care o vom elimina . Noua matrice a jocului este:

		Jucatorul 2		
		Stanga	Mijloc	
Jucator	1	2,1	2,3	Sus

Pentru jucătorul 2 acum, strategia *Stânga* este dominată de strategia *Mijloc* (1 < 3), deci o vom elimina.

Pentru jocul descris, rezultă singurul echilibru posibil dat de alegerea strategiilor *(Sus, Mijloc)*, pentru care câştigurile vor fi (2,3).

APLICATII ECONOMICE

Jocuri statice în informaţie completă

Duopolul Cournot

În 1838 Cournot a anticipat definiţia dată da Nash echilibrului jocului şi a elaborat modelul duopolului care îi poartă numele.

Modelul este următorul: pe piaţa unui produs omogen există două firme care îl pot produce. Fie q1 şi q2 cantităţile din bun produse de firma 1, respectiv de firma 2. Funcţia inversă de cerere pentru produs este dată prin:

p(Q)=$\begin{cases} a - Q & ,pentru\ Q < a \\ 0 & ,pentru\ Q \geq a \end{cases}$, cu a > 0

p reprezintă preţul bunului, iar Q = q1 + q2 este cantitatea totală de bun oferită pe piaţă.

Costul total al producerii cantităţii qi de produs de către firma i este Ci(qi)=cqi +Ci , unde c reprezintă costul marginal (comun pentru ambele firme) iar Ci costul fix.
(Evident, vom presupune că atât c cât şi Ci sunt mai mici decât a).

În cazul modelului Cournot ambele firme aleg simultan cantităţile pe care le oferă pe piaţă.

Pentru a determina echilibrul Nash al acestui joc să îl transformăm într-un joc sub formă normală. Pentru aceasta va trebui să specificăm:
a) jucătorii – care sunt cele două firme
b) strategiile disponibile pentru fiecare jucător – cantităţile alese de fiecare din marfa considerată pentru a fi produse
c) câştigul obţinut de fiecare jucător – care vor fi reprezentate prinprofiturile asociate.

Spaţiul strategiilor S i = [0,∞), adică spaţiul numerelor realenenegative, deoarece în mod uzual cantităţile qi sunt nenegative qi ≥ 0 .
(Evident, aceste cantităţi nu pot fi infinite şi ca urmare se poate face încă o restrângere a acestui spaţiu, dar aceasta nu este esenţială în rezolvarea problemei).
Câştigurile fiecărui jucător, fiind profiturile înregistrate, vor avea următoarea formă:

$$u_{i(q_i,q_j)} = q_i[p(q_i + q_j) - c] = q_i[a - q_i - q_j - c] - C_i$$

$\forall\, i = 1,2$

Dacă perechea de strategii (q_1^*, q_2^*) este un echilibru Nash, atunci pentru fiecare jucător i, $u_i(q_i^*, q_j^*) \geq u_i(q_i, q_j^*)$. Sau echivalent, fiecare jucător trebuie să rezolve următoarea problemă de maximizare:

max $u_i(q_i, q_j^*)$, $\forall\, q_i \in S_i$

Pentru modelul nostru , problema va fi :

max $u_i(q_i, q_j^*) = \max q_i \left[a - (q_i + q_j^*) - c\right] - C_i$,i=1,2 $\quad q_i \geq 0$

Condiţiile de ordin întâi pentru aceasta problemă conduc la :

$$\frac{\partial\, u_i(q_i, q_j^*)}{\partial q_i} = 0 \rightarrow q_i^* = \frac{1}{2}(a - q_j^* - c).$$

Deci cantităţile(q_1^*, q_2^*) care reprezintă echilibrul Nash sunt:

$$\begin{cases} q_1^* = \dfrac{1}{2}(a - c - q_2^*) & (X) \\ q_2^* = \dfrac{1}{2}(a - c - q_1^*) & (Y) \end{cases}$$

Din rezolvarea sistemului de ecuaţii rezultă : $q_1^* = q_2^* = \frac{a-c}{3}$ iar profitul fiecărei firme asociat va fi:

$u_{i(q_i^*, q_j^*)} = \frac{(a-c)^2}{9} - C_i$, evident dacă $q_i^* + q_j^* < a$, adică dacă a > 2c .

Cum se poate explica un astfel de rezultat? Intuiţia este simplă: dacă cele două firme nu sunt în condiţii de concurenţă, atunci ele se pot
comporta ca nişte monopolişti.

În acest caz problema ce trebuie rezolvată va fi: max ui (qi ,0) , pentru fiecare dintre aceştia, ceea ce conduce la cantitatea de monopol $q_m = \frac{a-c}{2}$ iar profitul asociat ar fi

$$u_{i(q_m, 0)} = \frac{(a-c)^2}{4} - C_i$$

Cum există două firme, această cantitate se va diviza în două, adică $q_i = q_m$ / 2 , pentru fiecare i, cantitate mai mică decât în cazul anterior, dar care aduce un profit mai mare pentru fiecare firmă:

$$q_i = \frac{a-c}{4},\; u_i(q_i, q_j) = \frac{(a-c)^2}{8}$$

În acest caz - dacă firmele nu se înţeleg între ele – atunci fiecare are interesul de a devia de la această strategie – adică de a produce mai mult în dezavantajul celuilalt (Se poate observa uşor că o alegere $q_i = q_m$ / 2 nu este cel mai bun răspuns al jucătorului i dacă jucătorul j alege $q_j = q_m$ / 2.

Aici cantităţile de mărfuri oferite vor creşte din parteafiecărei firme până la nivelul q_i = (a – c) / 2 .

Duopolul Bertrand

In anul 1883 Bertrand a propus un alt model pentru comportamentul a 2 firme care se află pe o aceeaşi piaţă (cazul duopolului Bertrand). În acest caz vom presupune că cei doi jucători sunt două firme care produc pentru o piaţă 2 produse diferite, dar care pot fi substituibile. Funcţiile de cerere ale consumatorilor sunt date prin relaţia :

$$q_1(p_i, p_j) = a - p_i + bp_j$$

(b > 0 arată că cele 2 produse sunt substituibile iar b < 0 arată că cele două produse sunt complementare).

Spaţiul strategiilor celor doi jucători este dat de sensul dat de alegerea preţurilor la care vor vinde cele 2 produse şi nu a cantităţilor – ca în cazul duopolului Cournot . Aducând jocul sub formă normală avem :

- 2 jucători – reprezintă cele două firme;
- spaţiul strategiilor – dat de alegerea preţurilor pi , p j cu S i = [0,∞) ;
- funcţiile de câştig - care vor fi profitul realizat de cele 2 firme, în cazul în care costul total este dat prin Ci(qi) = cqi (presupunem de această dată că nu avem cost fix, iar costul marginal este acelaşi pentru ambele firme).

Atunci perechea (p_1^*, p_2^*) este un echilibru Nash al jocului considerat (în care firmele aleg simultan preţul de desfacere) dacă fiecare firmă rezolvă următoarea problemă de maximizare:

max $u_i\left(p_i, p_j^*\right)$=max$\left[a - p_i + bp_j^*\right](p_i - c)$

Din condiţiile de ordin întâi rezultă:

$\frac{\partial u_i(p_i, p_j^*)}{\partial p_i}=0 \Rightarrow p_i^* = \frac{1}{2}\left(a + bq_j^* + c\right)$

Deci perechea de preţuri (p_1^*, p_2^*) va satisface sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} p_1^* = \frac{1}{2}(a + bp_2^* + c) \\ p_2^* = \frac{1}{2}(a + bp_1^* + c) \end{cases}$$

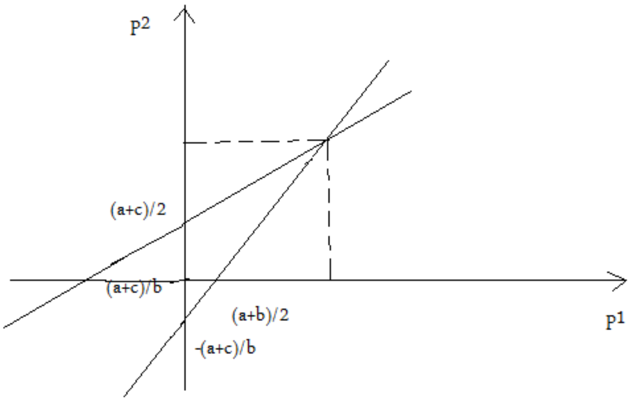
Si de aici , soluţia problemei: $p_1^*=p_2^*=\frac{(a+c)}{2-a}$

(Observăm că această problemă are soluţie doar dacă b < 2, altfel vom obţine preţuri negative) .
Analog cu situaţia anterioară putem determina şi grafic echilibrul Nash al jocului.
Considerând funcţiile care dau cel mai bun răspuns al fiecărui jucător:

$$R_1(p_2) = \frac{1}{2}(a + bp_2 + c)$$

$$R_2(p_1) = \frac{1}{2}(a + bp_1 + c)$$

Reprezentand grafic aceste functii, obtinem figura de mai jos.
Echilibrul se va afla la intersectia functiilor celor mai bune raspunsuri pentrui cei doi duopolisti, respectiv preturile stabilite de acestia vor fi:



$(p_1^*, p_2^*)=(\frac{a+c}{2-b},\frac{a+c}{2-b})$

Jocul investitiilor

Consideram a fi o corporatie cu doua sucursalemsi un sediu central. Fiecare sucursala raporteaza centralei veniturile estimate a fi obtinute in urma implementarii unui proiect comun (b_i). Costurile asociate realizarii proiectuluisunt de 100 de unitati monetare. Proiectul va fi acceptat daca veniturile pe care le aduce depasesc costurile, respectiv daca $b_1 + \ b_1 \geq 100$. Daca proiectul este acceptat, atunci fiecare sucursala va trebui sa trimita centralei veniturile estimate initial si va primi de la sucursala o suma fixa A_i, precum si costurile aferente. Daca proiectul nu este acceptat, atunci castigurile sucursalelor vor fi nule. Stiind ca A_1 este cel putin 20 de unitati monetare, se cere functia de castig pentru sucursala 1 in raport cu b_1 si b_2.

Functia de castig ceruta este:

$$\pi_1(b_1, b_2) = \begin{cases} 20 - b_1, daca\ b_1 + b_1 \geq 100 \\ 0 \qquad\quad , daca\ b_1 + b_1 \leq 100 \end{cases}$$

Jocuri dinamice in informatie completa

Politica monetara

Una din atributiile sindicatelor este aceea a solicitarii majorarii salariilor. Aceste solicitari au ca punct de plecare inflatia pe care sindicatele o asteapta pentru perioada urmatoare. Autoritatea monetara, respectiv Banca Nationala urmareste o solutie intermediara intre inflatie si somaj.

Jocul dinamic in doua etape, intre sindicate si autoritati se va desfasura in acest mod:

- Sindicatele anticipeaza inflatia π^csi cer majorarea salariilor cu aceasta proportie;
- Autoritatiile observa cererea salariala (respectiv inflatia asteptata) si aleg inflatia reala π;
- Functiile de castig sunt:

- Pentru sindicate : $U_S(\pi, \pi^c) = -(\pi - \pi^c)^2;$
- Pentru autoritati: $U_A(\pi, y) = -c\pi^2 - (y - y^*)^2.$

Observatii

- π reprezinta inflatia reala, iar π^c inflatia asteptata. Pentru salariati, anticiparile corecte (π=π^c) conduc la castigurile maxime (respective U_S=0);
- y reprezinta outputul real, iar y^* reprezinta outputul prognozat.
- c, este un parametru care indica importanta inflatiei pentru autoritati, c>0.

Autoritatile doresc maximizarea castigului, care pentru ei este dat de minimizarea inflatiei, dar si de abaterea outputului de la nivelul eficient, y^*;

Presupunem ca niveleul real al productiei este descris de relatia: y=by^*+d(π- π^c) , unde b<1 indica o piata monopolistica d>0 indica efectul inflatiei asupra outputului

Deci functia de castig a autoritatilor va fi in raport doar cu inflatia:

$$W(\pi, \pi^c) = -c\pi^2 - [(b-1)y^* + d(\pi - \pi^c)]^2$$

Pentru sindicate strategia este data de inflatia asteptata, in timp ce pentru autoritati strategia depinde doar de nivelul real al inflatiei.

Determinam solutia acestui joc prin inductie recursiva :

Pasul 1. In ultima etapa, autoitatile maximizeaza castigul $W(\pi, \pi^c)$ in raport cu π.

$$\max_{\pi} W(\pi, \pi^c) = \max_{\pi}\{-c\pi^2 - [(b-1)y^* + d(\pi - \pi^c)]\}$$

De aici, functia de restrictie a autoritatilor este data de:

$$\pi^*(\pi^c) = \frac{d}{c + d^2}[(1-b)y^* + d\pi^c]$$

Pasul 2. Pentru sindicate, alegerea lui π^c se face astfel incat sa se maximizeze castigul: $\max_{\pi^c} U(\pi, \pi^c) = \max_{\pi^c}[-(\pi - \pi^c)^2]$ cu solutia $\pi = \pi^c$, deci

$$\pi^c = \frac{d}{c+d^2}[(1-b)y^* + d\pi^c] \Rightarrow \pi^{c^*} = \frac{d(1-b)}{c} y^* = \pi^*$$

Jocul falimentului

Acest joc presupune existenta unui bancher si respectiv a unui grup de lucratori. Bancherul poate acorda un credit lucratorilor sau poate refuza acordarea acestui credit. Daca bancherul crediteaza si lucratorii muncesc, intreprinderea poate produce un venit care depinde de starea naturii. Exista trei stari ale naturii: cea mai prielnica este cea “normala” (1), cu o probabilitate de 0,9, iar celelalte doua stari sunt “rea” (2) si “foarte rea” (3), respectiv falimentul si inchiderea, cu probabilitatile de 0,05 fiecare. Probabilitatile productiei sunt prezentate in tabelul urmator:

stare	venit	probabilitate
1	3000	0.9
2	2000	0,05
3	1000	0,05

Costul de oportunitate al capitalului este de 0.01 si creditorul, fiind orientat spre profit, ofera un imprumut de 1000pentru a permite desfasurarea productiei. Rata dobanzii este de 10%, deci trebuie 1100 la sfarsitul perioadei.

Se presupune ca lucratorii pot avea o alternativa de a castiga din alta afacere 1500. Daca imprumutul este facut, starea naturii este cunoscuta si participantii isi reconsidera strategia conform noilor informatii.

Se cere sa se analizeze derularea jocului si sa se stabileasca daca banca acorda imprumutul prin inductie recursiva. De asemenea, se doreste sa se stie care este nivelul imprumutului care poate fi acordat de banca pentru a nu pierde si lucratorii sa accepte creditul.

Ce se poate intampla in starea 3? Membrii cooperativei demisioneaza, in sensul ca se considera cele mai bune oportunitati alternative, 1500>1000 deci cooperativa la care sunt lucratori inceteaza sa mai existe si creditorul nu mai primeste nimic.

Dar in starea 1? Veniturile intreprinderii sunt suficiente ca sa poata fi platitat datoria de 1100 si salariile de 1900, salarii care sunt mai mari decat cele mai bune altermative, deci salariatii vor ramane si vorproduce, iar ambii jucatori, banca si cooperativa lucratorilor, eu cele mai bune rezultate.

In starea 2, venitul este suficient de mare ca datoriile sa fie platite, dar lucratorii primesc doar 900, numar care este mai mic decat 1500. In acest caz, membrii lucratori ai cooperativei vor demisiona si cooperativa se va dizolva din lipsa de membri, iar banca nu va primi nimic. Pe de alta parte, daca banca va renegocia plata partiala a 500 sau mai putin, atunci lucratorii vor primi 1500 si afacerea continua. Deci, in aceasta stare, banca renegociaza si castiga 500. Valoarea asteptata de banca este: 0,9 (1100) + 0.05 (500) + 0,05 (0) = 1015 > 1010.

Deci banca castiga mai mult decat cea mai buna alternative si accepta contractual. Pentru lucratorii din cooperative se obtine urmatoaraea valoare astepatata: 0,9 (1900) + 0,05 (1500) + 0,05 (1500) =1860 >1500. Si ei, de asemenea, accepta contractual. Astfel imprumutul este facut, in ciuda unei probabilitati de faliment de 0,05.

In multe jocuri de acest fel, unul sau altul dintre jucatori poate obtine un rezultat mai bun daca el insusi se implica din start credibil intr-o strategie care poate parea mai putin avantajoasa,imediat ce starea naturii este cunoscuta si ceilalti au luat déjà deciziile. Va avea banca un rezultat mai bun daca se angajeaza ea insasi sa negicieze? Raspunsul este nu. Castigul esi va fi: 0,9 (1100) +0,05 (0) + 0,05 (0)=990<1010. Creditorul va avea rezultate mai slabe daca, de exemplu legislatia interzice renegocierea sau daca lucratorii refuza sa mai faca imprumutul.

Vom analiza alte doua situatii distince ce privesc situatia muncitorilor. Prima dintre acestea este situatia “de sclavie”, respective situatia in care muncitorii nu pot parasi firma (dintr-un motiv sau altul, cum ar fi lipsa altor locuri de munca sau contracte dificile). In acest caz, ar fi dorinta muncitorilor ca intreprinderea sa fie abandonata daca datoria este platita in starea 2. Dar daca ei ar fi legati intr-un fel de firma? “Sclavia” ofera o posibilitate. Intr-un system care permite “sclavia”, “antreprenorul” cumpara “sclavi” in loc sa inchiriezelucratori liberi . In starea naturala 3, antreprenorul cumpara “sclavi” ca forta de munca pentru 1500, platind datoria de 1100 si incasand profit (asigurand costul hranei necesare pentru a mentine sclavii productive mai putin de 400). In starea 2, “antreprenorul” va solicita sclavi care sa lucreze pentru firma, produce 2000, plateste datoria si castiga 900 de unitati monetare, mai putin hrana sclavilor. Banca isi va primi datoria in oricare stare si va prefera poate sa-l crediteze mai curand pe stapanul sclavilor decat pe acea cooperative a muncitorilor.

Al treilea caz il reprezinta cel ai “inchirierii” muncitorilor pe baza unei intelegeri mutual, dar, in acest caz, patronul se asteapta ca lucratorii sa-I plece oricand altcineva le va oferi mai mult. In acest exemplu, imprumutul este facut asociatiei cooperatiste de lucratori. Daca ar fi fost facuta indivizilor, ei ar fi fost mai putin responsabilifata de imprumut dup ace s-ar fi mutat la slujbe mai bine platite. Dar obligatia de aplati imprumutul a fost asumata de grupul de lucratori, luati ca grup, si grupul nu poate exista decat atata vreme cat este in intereseul lucratorilor sa existe.aceasta nu reflecta constituirea firmei, ci constituirea liberal a societatii care sustine ca nicio agentie, chiar sic ea constituita de lucratori, nu poate cere unei persone sa lucreze fara a-I oferi un salariu cu care acesta ar fi fost de accord initial.

Proprietarii sau corporatia investitoare este mai mult decat un mijlocitor intre grupul de lucratori si banca, in ceea ce priveste falimentul.

In concluzie, esenta falimentului consta in renegocierea contractului de imprumut intre un creditor si un grup de lucratori, dar si in legile care scutesc creditorul de suma datorata in unele conditii.Aceste legi protejeaza creditorii si nu debitorii.

Investitia strategica si duopolul

Pe piaţa unui produs există doi producători, firma 1 şi firma 2, pentru care costul mediu este acelaşi, c=3 u.m. pe unitatea de produs. Firma 1 poate să instaleze o nouă tehnologie care îi va reduce costul la c_1=1 u.m. pe unitatea de produs, dar costul acestei tehnologii este f. Firma 2 observă decizia de investiţii a primei firme şi apoi alege nivelul outputului simultan cu prima firmă.

Funcţia de cerere inversă pe piaţă este P(Q) = a – Q, cu Q = q1+q2.

Funcţiile de câştig sunt date de profiturile firmelor, respectiv pentru firma 1 avem:

$$\pi_1(q_1,q_2)=\begin{cases}(a-c-q_1-q_2)q_1 & -\, daca\ nu\ investeste\\ (a-c_1-q_1-q_2)q_1-f & -\, daca\ investeste\end{cases}$$

$$\pi_2(q_1,q_2)=(a-c-q_1-q_2)q_2$$

Se cere să se determine echilibrul acestui joc. Date numerice a=15,f – parametru.

Rezolvare

Dacă firma 1 nu investeşte, atunci costurile medii pe unitatea de produs vor fi identice pentru cele două firme, care se vor afla în competiţie de tip Cournot.

Funcţiile de reacţie sunt: $R_i(q_j)=\frac{a-c}{2}-\frac{q_j}{2}$, iar echilibrul jocului este

$q_1^*=\frac{a-c}{3}=q_2^*$, iar nivelurile profiturilor vor fi $\pi_1^*=\pi_2^*=\frac{(a-c)^2}{9}$

Pentru datele numerice avem: $(q_1^*,q_2^*)=(4{,}4);\ \ (\pi_1^*,\pi_2^*)=(16{,}16)$

Dacă firma 1 investeşte, atunci funcţiile de reacţie se obţin din problemele:

$$\max_{q_1}\pi_1(q_1,q_2)=\max_{q_1}(a-c_1-q_1-q_2)q_1-f$$

$$\max_{q_2}\pi_1(q_1,q_2)=\max_{q_1}(a-c-q_1-q_2)q_2$$

De aici: $R_2(q_1)=\frac{a-c}{2}-\frac{q_1}{2}$, $R_1(q_2)=\frac{a-c_1}{2}-\frac{q_2}{2}$

Nivelul de echilibru rezultă din rezolvarea sistemului:

$$\begin{cases}q_2=\dfrac{a-c}{2}-\dfrac{q_1}{2}\\ q_1=\dfrac{a-c_1}{2}-\dfrac{q_2}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}q_1+2q_2=a-c\\ 2q_1+q_2=a-c_1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}q_{1I}^*=\dfrac{a+c-2c_1}{3}\\ q_{2I}^*=\dfrac{a+c_1-2c}{3}\end{cases}$$

cu câştigurile $(\pi_{1I}^*,\pi_{2I}^*)=\left(\left(\frac{a+c-2c_1}{3}\right)^2-f;\ \left(\frac{a+c_1-2c}{3}\right)^2\right)$

Deci firma 1 va alege să investească doar dacă $\pi_{1I}^*>\pi_1$, adică

$\frac{(a-c)^2}{9} < \frac{(a+c-2c_1)^2}{9} - f, adica\ f < \frac{(a+c-2c_1)^2}{9} - \frac{(a-c)^2}{9}$.

Numeric obţinem $(q_{I1}^*, q_{2I}^*) = (\frac{16}{3}, \frac{10}{3})$

$$(\pi_{I1}^*, \pi_{2I}^*) = (\frac{256}{9} - f, \frac{100}{9})$$

Deci prima firmă va investii doar dacă pentru ea costul tehnologic,
f$<\frac{112}{9} = \frac{256}{9} - 16$

Jocuri statice in informatie incompleta

Jocul intrarii pe piata

Se consideră un joc în care jucătorii sunt două firme, din care una este deja pe piaţă, iar a doua doreşte să intre. Prima firmă poate să se extindă construind o nouă fabrică, iar cea de-a doua nu cunoaşte costul noii construcţii, ştiind doar că poate fi 4 unităţi sau 1 unitate.
Câştigurile sunt descrise în figura:

F1	F2		
		I	N
	C	-1,-1	1,0
	NC	1,1	2,0

Cost mare:p_1

F1	F2		
		I	N
	C	2,1	4,0
	NC	1,1	2,0

Cost mic: p_2

Câştigurile jucătorului 2 depind de faptul că primul a construit sau nu fabrica, dar nu este influenţat de costul acestei investiţii.

Observăm faptul că pentru jucătorul 2 este preferabil să intre doar dacă jucătorul 1 nu construieşte. Pentru jucătorul 1 în schimb vedem că strategia de a construi este dominantă doar dacă are un cost mic.

Dacă notăm cu 1 p probabilitatea cu care jucătorul 2 credea că 1 are un cost mare, cum 1 construieşte doar dacă are un cost mic, atunci 2 va intra pentru probabilitatea p_1>1/2 si nu va intra cu probabilitatea p_1<1/2.

Modificând jocul, cu câştigurile descrise în figura, avem:

F1	F2		
		I	N
	C	0,-1	2,0
	NC	2,1	3,0

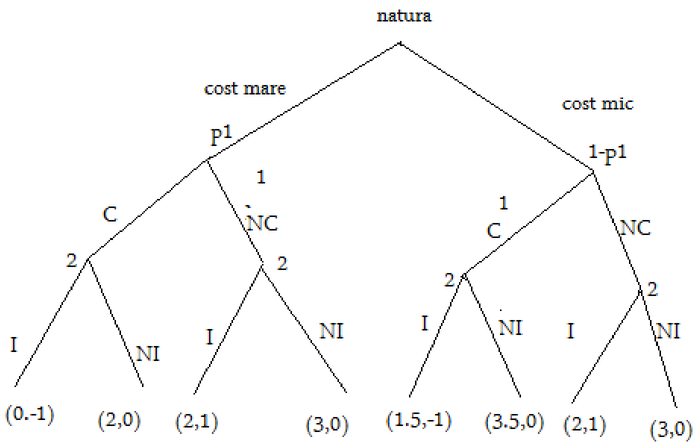
Cost mic

F1	F2		
		I	N
	C	1.5,1	3.5,0
	NC	2,1	3,0

Cost mare

Fie y probabilitatea ca firma 2 să intre pe piaţă (deci (1 – y) este probabilitatea ca firma 2 să nu intre pe piaţă). În acest caz strategia de a nu construi rămâne dominantă dacă firma 1 are un cost mare. Dacă este un cost mic, atunci strategia optimă a lui1 depinde de probabilitate ca 2 să intre pe piaţă. A construi este mai bine decât a nu construi dacă:
1,5 y + 3,5 (1 – y) > 2 y + 3 (1 – y). Rezultă y<1/2.

Astfel, 1 poate încerca să prezică comportamentul lui 2 pentru a-şi alege propria strategie. Harsanyi a propus o transformare a acestui joc dintr-unul în informaţie incompletă într-un joc în informaţie imperfectă, descriind sub formă extinsă jocul cu ajutorul ”Naturii”.



Prin această reprezentare am obţinut un joc clasic, respectiv un joc dinamic în informaţie incompletă, al cărui echilibru se poate determina prin metode deja prezentate. Vedem că în raport cu probabilitatea asignată de jucătorul 1 pentru comportamentul jucătorului 2 vom obţine echilibrul anterior, respectiv: dacă firma 1 va crede că firma 2 intră pe piaţă cu probabilitatea y>1/2, atunci el va alege să nu construiască, iar dacă probabilitatea cu care crede că firma 2 intră este y<1/2 atunci va alege să construiască.

Duopolul Cornout in informatie incompleta

Se consideră modelul duopolului Cournot, (analizat în capitolul 2), în condiţii de informaţie incompletă. Astfel, pe piaţa unui produs există doi producători, care produc cantităţile q_1, respectiv q_2 . Contitatea totală de produs de pe piaţă va fi Q.

Funcţia de cerere inversă este: P(Q) = c – Q, Q =$q_1 + q_2$

Costul mediu pe unitatea de produs al firmei 1 este c, iar costul total va fi: $c_1(q_1)$ = cq_1

Firma 2 în schimb, poate avea două tipuri de cost, şi anume fie un cost mediu mare, c_M , fie un cost mediu mic, c_m, astfel încât funcţia de cost total a firmei 2 va fi:

$$c_2(q_2) = \begin{cases} c_m q_2 \\ c_M q_2 \end{cases} \quad \text{cu } c_m < c_M$$

Firma 1 crede cu probabilitatea θ că firma 2 are costul mare, c_M şi cu probabilitatea 1 - θ că firma 2 are costul mic, cm. Tipul firmei 2 este dat de costul mediu pe care îl poate avea. Aceasta este o informaţie privată, adică firma 2 îşi cunoaşte propriul cost, în schimb firma 1 nu ştie acest cost, deci nu poate determina profitul firmei 2. În schimb firma 1 îşi formează anumite credinţe, presupuneri, asupra tipului care este firma 2. Astfel, presupune cu probabilitatea θ este firma 2 este de tipul c_M , şi cu probabilitatea 1- θ este de tipul c_m .

Fiecare dintre firme are de rezolvat problema:

Pentru firma 2:

$$\max_{q_2}(a - q_1^* - q_2 - c_m)q_1$$ pentru tipul c_M

sau

$$\max_{q_1}(a - q_1^* - q_2 - c_M)q_2$$ pentru tipul cm .

Pentru firma 1:

$$\max_{q_1} \theta[\mathrm{a} - q_1 - q_2^*(c_M) - c]\, q_1 + (1-\theta)[\mathrm{a} - q_1 - q_2^*(c_m) - c]q_1$$

Rezolvând aceste probleme obţinem soluţiile (funcţiile de reacţie ale firmei 2 în raport cu cantităţile elese de firma 1 şi de tipul firmei):

$$q_2^*(c_M) = \frac{a-q_1^*-c_M}{2} \qquad (1) \text{ sau}$$

$$q_2^*(c_m) = \frac{a-q_1^*-c_m}{2} \qquad (2)$$

Rezultă pentru firma 1 funcţia de reacţie (în raport cu funcţiile de reacţie ale firmei 2 şi cu probabilităţile cu care crede firma 1 că firma 2 este de un tip sau de altul):

$$q_1^* = \frac{\theta[\mathrm{a}-q_2^*(c_M)-c]+(1-\theta)[\mathrm{a}-q_2^*(c_m)-c]}{2} \quad (3)$$

Din relatiile (1),(2),(3) ⇒

$$q_2^*(c_M) = \frac{a-2c_M+c}{3} + \frac{1-\theta}{6}\,(c_M - c_m)$$

$$q_2^*(c_m) = \frac{a-2c_m+c}{2} + \frac{\theta}{6}\,(c_M - c_m)$$

$$q_1^*(c_m) = \frac{a-2c+\theta c_M+(1-\theta)c_m}{3}$$

Observaţie

În raport cu parametrul θ, respectiv cu probabilitatea cu care crede firma 1 că firma 2 are costul mare, strategiile alese de cele două firme tind către cele în informaţie completă (θ →0 sau θ →1)

Jocuri dinamice in informatie incompleta:Investitiile si structura capitalului

Investitiile si structura capitalului

Presupunem cazul unui antreprenor ce doreşte să înceapă o nouă afacere şi are nevoie de capital pentru a porni la lucru.Antreprenorul (A) are informaţii private despre profitabilitatea afacerii sale, dar câştigurile nu pot fi despărţite de cele ale companiei (decişi cele vechi). Presupunem că A oferă un număr de acţiuni în schimbul finanţării necesare.În ce condiţii va avea loc finanţarea? Să "traducem" problema intr-un joc de semnalare. Presupunem că profitul firmei poate fi de 2 tipuri: scăzut S sau mare M, M>S>0 .

Necesarul de investiţie este I, iar câştigul este R, atunci R > I(1+r).

Desfăşurarea jocului este următoarea:

1. Natura determină tipul firmei (cu probabilitatea p firma are profitul S).
2. A ştie profitul şi oferă investitorului o proporţie α din π, cu 0≤S≤1.
3. Investitorul observă α (nu şi π) şi decide să accepte sau să respingă oferta.
4. Dacă investitorul respinge oferta , atunci câştigurile pentru investitor sunt I(1+r), iar pentru A este π.

Dacă investitorul acceptă atunci câştigurile pentru investitor sunt S(π+R), iar pentru A (1-S)(π+R).

Myers şi Mayluf (1984) au analizat acest model pornind de la o firmă mare cu acţionari şi manager. Zenelor (1991) a determinat contractul optimal pe care trebuie sa-l ofere managerul acţionarilor. Jocul este foarte uşor datorită simplităţii soluţiei: mulţimea acţiunilor este limitată iar mulţimea semnalelor este mare dar ineficientă. Să presupunem că după ce a apărut oferta α, investotorul presupune cu probabilitatea q că π=S. Atunci investitorul acceptă propunerea α dacă şi numai dacă:

α[qS+(1-q)M+R] ≥ I(1+r)

Pentru A: presupunem că ştie că profitul este π, va compara câştigul pe care îl are în cele două variante şi dacă face investiţia sau nu, in raport cu α – partea ce o va oferi:

α(π+R)=R

(1 - α)·(π + R)≥π ⇒ (π + R) - α·(π + R) ≥ π ⇒ R ≥α·(π + R) ⇒

$$\Rightarrow \alpha \leq \frac{R}{\pi+R}$$

Pentru un echilibru grupant presupunerea investitorului trebuie să fie q = p după ce primeşte oferta (din regula Bayes). Dar restricţia (2) este mult mai dificil de satisfăcut pentru tipul M decât pentru tipul S.

Din (1) şi (2) rezultă:

$$\alpha \geq \frac{I(1+r)}{pS+(1-p)M+R} \text{ si } \alpha \leq \frac{R}{\pi+R} \Rightarrow \frac{I(1+r)}{pS+(1-p)M+R} \leq \frac{R}{\pi+R}$$

- pentru tipul π=S: $\frac{I(1+r)}{pS+(1-p)M+R} \leq \frac{R}{S+R}$ cum M>S

π=M: $\frac{I(1+r)}{pS+(1-p)M+R} \leq \frac{R}{M+R}$

M>S ⇒ $\frac{R}{S+R} > \frac{R}{M+R}$

- dacă p → 0, atunci relaţia este adevărată, deoarece I(1+R) ≤ R
- dacă p → 1, atunci echilibrul este posibil doar dacă:

$$\frac{I(1+r)}{S+R} \leq \frac{R}{M+R} \Rightarrow SR+R^2-MI(1+r)-RI(1+r) \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R[R-MI(1+r)] \geq MI(1+r)-SR \Rightarrow RI(1+r) \geq \frac{I(1+r)M}{R} - S$$

Interpretare Dificultatea obţinerii unui echilibru grupant este aceea că tipul cu profit mare trebuie să “contribuie” (subvenţioneze) pe cel cu profit mic. Dacă investitorul este sigur că π=M atunci q=0 astfel α este la nivelul cel mai mic posibil:

$$\alpha=\frac{I(1+r)}{M+R}$$

În acest caz pentru firma profitabilă valoarea α va fi prea mare, poate chiar prea mare pentru a determina să realizeze proiectul. Un echilibru grupant va exista pentru p → 0 deci, fie costul „ subvenţionării” este mic, fie este îndeplinită relaţia (3), adică se obţine mai mult din costul dus de noul proiect decât din subvenţionare. Dacă (2) nu este îndeplinită, atunci nu există un echilibru grupant, şi rezultă în acest caz existenţa unui echilibru separator.

În concluzie, firma S va oferi proporţia $\alpha=\frac{I(1+r)}{M+R}$ ceea ce investitorul va accepta, iar firma M va oferi proporţia $\alpha<\frac{I(1+r)}{M+R}$ ceea ce investitorul va refuza. În asemenea situaţie investiţiile au o eficienţă scăzută, chiar dacă noua investiţie este profitabilă, deoarece tipul “bun” nu va dori să o facă.

Aceasta arată modul în care semnalele nu sunt eficiente.

Problema se poate modifica, în sensul în care firma nu oferă acţiuni, ci face un împrumut D.

Dacă nu se dă faliment atunci câştigul investitorului este D, iar al firmei: π+R-D

Dacă se dă faliment, atunci pentru investitor câştigul este π+R, iar pentru firmă 0.

Cum S > 0, există un echilibru grupant: ambele tipuri de firme oferă un contract D=I(1+r) pe care investitorul nu îl va accepta.

Dacă D este negativ, astfel încât R + D < I (1+r), atunci tipul slab nu va putea plăti datoria, iar investitorul nu va accepta contactul.

Analog se poate raţiona pentru cazul în care S şi M reprezintă profituri aşteptate (cu probabilitatea 1/2).

Dacă profitul este π + K cu probababilitatea 1/2 , atunci tipul slab nu va fi în stare să plătească dobânda, iar investitorul nu va accepta contractul.

Dacă profitul este π - K, cu probababilitatea 1/2, atunci nici firma, nici investitorul nu vor accepta contractul.

Studiu de caz: stabilirea pretului unui produs in doua companii

Economistii folosesc de obicei teoria jocurilor pentru a explica comportamentul firmelor in situatia de oligopol. Totusi, managerii, pot folosi aceasta teorie ca si o unealta pentru reducerea nivelului de risc si a incertitudinii in procesul de luare a deciziilor. Cheia acestei teorii este “ sa porti palaria firmei/firmelor competitoare”.

In loc sa ghiceasca pur si simplu cum o firma competitoare se va comporta/actiona, managerul incearca sa vada lumea prin perspectiva acelei firme. Daca managerul poate sa anticipeze comportamenetului oponentului, atunci acesta poate initia o strategie cu mai putine incertitudini si riscuri.

De la teoria deciziei la teoria jocurilor

Teoria jocurilor permite unui leader sa ia decizii care anticipeaza raspunsul probabil al competitorului la initiativele strategice. Astfel, teoria jocurilor poate reduce si, uneori elimina, incertitudinea asociata cu procesul de luare a deciziilor.

Pentru a ilustra acest lucru sa presupunem ca profitul depinde de pretul care este selectat de competitori. Fie 2 companii rivale, spre exemplu Coca-Cola si Pepsi cu urmatoarele venituri potentiale:

1) Daca ambele firme stabilesc pretul de 4 lei , Coca-Cola se asteapta la un profit de 100 lei

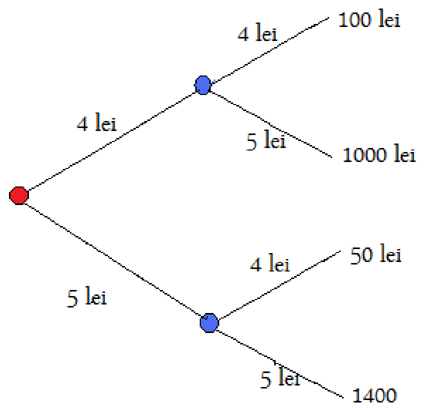
2) Daca ambele companii vor vinde produsul cu 5 lei, compania Coca-Cola va avea un castig de 1400 lei

3) Daca Coca-Cola vinde cu 4 lei si competitorul cu 5 lei, profitul Coca-Cola este de 1000 lei

4) Daca Coca-Cola stabileste pretul de 5 lei si Pepsi 4 lei, Coca-Cola castiga 50 lei

Se pot crea scenarii intr-un arbore de decizie conform Figurii1. Privind din perspectiva Coca-Cola, daca aceasta stabileste pretul de 4 lei, fie castiga 100 lei sau 1000 lei, in functie de decizia competitorului. Pe de alta parta, daca se stabileste un pret de 5 lei, castigul va fi fie de 1400 lei, fie de 50 lei.

Figura 1.
Arborele de decizie



Pentru a lua o decizie corecta, este nevoie de o analiza a probabilitatilor strategiilor de preturi ale competitorului. Cum le putem deduce? Prin ghicire, pastrarea istoricului preturilor, probabilitate de 50-50? Presupunand ca se alege ultima varianta, atunci valoarea asteptata a castigului pentru un pret de 4 lei ar fi 100 x 0.5 + 1000 x 0.5, adica 550 lei. Valoarea asteptata a castigului pentru un pret de 5 lei este 1400 x 0.5 + 50 x 0.5, ar fi 725 lei. La prima vedere, s-ar parea ca alegerea pretului de 5 lei ar fi varianta cea mai avantajoasa.

Dar strategia de alegerea a pretului ar fi diferita daca s-ar cunoaste faptul ca pretul stabilit de competitor este de 4 lei? In mod clar, daca s-ar cunoaste aceasta informatie s-ar alegere pretul de 4 deoarece s-ar obtine un profit mai mare stabilind pretul de 4 lei comparativ cu 5. Bineinteles ca, din cauza faptului ca nu se stie cu certitudine care va fi strategia competitorului se presupune 50-50 avantaj pentru fiecare strategie de pret. Totusi, presupunand ca exista o probabilitate de 50% ca selectia pretului competitorului se va schimba de la 4 lei la 5 lei, ce se va presupune implicit despre Pepsi? Ca acesta la lua decizii aleatoare? Ca acesta nu va realiza nici o strategie? Presupunand ca acest

competitor este cel putin la fel de analist ca si compania studiata, atunci si acesta va dezvolta / formula o strategie bazata pe informatiile disponibile. Presupunand ca Pepsi are urmatorul set de venituri:
1) Daca ambele stabilesc pretul de 4 lei , Pepsi se asteapta la un profit de 100 lei
2) Daca ambele companii vor vinde produsul cu 5 lei , compania Pepsi va avea un castig de 250 lei
3) Daca Coca-Cola vinde cu 4 lei,si Pepsi cu 5 lei profitul sau este de 50 lei
4) Daca Coca-Cola stabileste pretul de 5 si Pepsi de 4 lei, Pepsi castiga 300 lei

Aceasta informatie poate fi de ajutor in luarea deciziei? S-a stabilit ca alegerea companiei Coca-Cola in ceea ce priveste pretul se combina cu strategia aleasa de Pepsi. Plecand de la presupunerea urmatoare: Coca-Cola se afla in pozitia de a alege strategia de pret dupa ce Pepsi a ales-o pe ceea corespunzatoare. Ar fi importanta centralizarea acestor informatii intr-o matrice, asa cum este prezentata in Figura 2.

Atat Coca-Cola cat si Pepsi trebuie sa decida ce pret vor alege intre 4 lei si 5 lei.

Avand la dispozitie fiecare strategie de pret exista doua variante posibile pentru venituri. Se cunoaste ca daca competitorul alege pretul de 4 lei, profitul companiei Coca-Cola va fi de 100 lei, daca alegerea ei privind pretul este de 4 lei si de 50 lei, daca se alege pretul de 5lei.

Vom plasa aceste venituri in celulele corespunzatoare din matrice. In mod cert, Coca-Cola va raspunde unui pret al Pepsi de 4 lei prin alegerea unui pret de 4 lei.

Pe de alta parte, daca competitorul alege 5 lei, Coca-Cola ar alege 5 lei, pentru ca profitul acesteia ar fi de 1400 lei, in timp ce castigul va fi de 1000 lei daca s-ar alege pretul 4.

Din pacate, neavand informatia privind alegerea Pepsi, Coca-Cola trebuie sa-si stabileasca propria strategie de alegere a pretului.

Deoarece strategia Coca-Cola depinde de strategia aleasa de Pepsi, Coca-Cola nu are o strategie dominanta. O astfel de strategie exista in cazurile in care o singura strategie beneficiaza de cele mai favorabile castiguri indiferent de strategia aleasa de competitor.

Figura 2.

Pepsi / Coca-Cola	4	5
4	100,100	1000,50
5	50,300	1400,250

Insa, sa analizam daca informatia privind competitorul furnizeaza o intelegere suplimentara. Potrivit datelor, daca Coca-Cola stabileste pretul de 4 lei, Pepsi va raspunde cu 4 lei, profitul 100, fiind mai mare decat 50, profit pe care acesta il va obtine prin stabilirea unui pret de 5 lei.

Pentru distingirea veniturilor Pepsi de cele ale Coca-Cola, am colorat aceste venituri cu albastru, si respectv rosu, cum se poate vedea in fig. 2.

Daca se selecteaza pretul de 5 lei de catre Coca-Cola, Pepsi va alege tot pretul de 4 lei. Daca Pepsi stabileste un pret de 4 lei, profitul va fi de 300; daca stabileste un pret de 5 lei, profitul sau va fi de 250. Spere deosebire de Coca-Cola, Pepsi are o **strategie dominanta** in ceea ce priveste stabilirea pretului de 4 lei, deoarece el va alege aceasta varianta indiferent de strategia Coca-Cola.

Aceasta informatie este importanta pentru Coca-Cola? Cu siguranta ca da. Asa cum am observat anterior, strategia pe care Coca-Cola o alege este influentata de strategia implementata de Pepsi.Totusi, asa cum stim, Pepsi va alege pretul de 4 lei. Asadar cea mai buna reactie a Coca-Cola este alegerea unui pret de 4 lei.

Presupunand ca, pornind de la alegerea instinctuala, compania stabileste pretul de 5 lei. Dupa ce strategiile sunt dezvaluite, Coca-Cola ar castiga 50 lei.

Totusi, greselile pot fi rectificate si Coca-Coal va restabili pretul la 4 pentru a creste castigurile la 100 lei. Pepsi va fi satisfacut cu castigul pe care il are? Cu pretul de 4 stabilit de ambele companii , Pepsi castiga 100 lei.

Daca acesta schimba strategia si ridica pretul la 5, castigul scade la 50 lei.

De observat este ca la perechea de strategii pentru care fiecare parte castiga 100 lei, fiecare parte va experimenta o scadere a veniturilor daca cealalata parta schimba pretul. Un set de strategii din care nici una dintre parti nu poate schimba unilateral strategia si sa isi creasca castigurile se numeste **echilibru Nash**. Teoria jocurilor sugereaza ca competitorii tind sa se mute catre acest punct de echilibru. Prin anticiparea acestui echilibru, se pot reduce sau chiar elimina multe din riscurile asociate procesului de luare a deciziilor.

In figura 3 : se deseneaza cate un cerc pentru fiecare celula preferata de Coca-Cola. Daca Pepsi alege 4 si Coca-Cola alege 4, se va desena un cerc. Daca Pepsi alege 5, si Coca-Cola 5, se va desena si in aceasta situatie un cerc. Pentru identificarea celulelor preferata ale Pepsi vom desena cate un patrat. Daca Coca-Coal alege 4 si Pepsi alege 4, se va desena un patrat in aceasta celula. Daca Coca-Cola alege 5, si Pepsi alege 4, vom mai desena un patrat in celula corespondenta. Observatie: celula 100/100 contine atat un cerc cat si un patrat. Cercul indica situatia in care Coca-Cola alege 4 daca Pepsi alege 4, si patratul sugereaza ca Pepsi alege 4 daca Coca-Cola alege 4. Astfel o celula care contine atat un patrat cat si un cerc simbolizeaza un echilibru Nash.

Pepsi / Coca-Cola	4	5
4	$\boxed{100,100}$	1000,50
5	$\boxed{50,300}$	1400,250

Figura 3.

Un echilibru Nash va exista intotdeauana daca cel putin o parte are o strategie dominanta. In studiul nostru de caz, Pepsi are o strategie dominanta prin alegerea pretului de 4 lei. Sub nici o forma nu va schimba strategiile. Stiind ca Pepsi alege 4, Coca-Cola va alege varianta care se pliaza cel mai bine pe aceasta conditie. In acest caz, atunci cand competitorul alege 4, Coca-Cola va alege si ea 4. Faptul ca acesta este setul de strategii care constituie echilibrul Nash este un lucru evident.In mod cert, competitorul nu va avea beneficii daca va schimba strategia. Mai departe Coca-Cola isi va alege strategia pe baza actiunilor competitorului. Se poate observa ca nici una dintre ce edoua companii nu va neneficia daca va alege o alata strategie.

In anticiparea echilibrului Nash, o companie ar trebui sa isi puna doua intrebari simple. Prima: are o strategie dominanta? Daca da, atunci strategia trebuie implementata. Echilibrul Nash este determinat de reactia competitorului. Daca nu exista o strategie dominanta, trebuie sa se decida daca competitorul are strategie dominanta? Daca da, atunci echilibrul Nash este atins prin determinarea reactiei potrivite la strategia competitorului.

Aplicând teoria jocurilor la pieţele cu concurenţă imperfectă s-au obţinut câteva rezultate interesante:

- Pe măsură ce numărul firmelor oligopoliste rivale creşte, preţul şi volumul ofertei la nivel de ramură tind să fie egale cu cele de pe piaţa cu concurenţă perfectă;
- Dacă firmele decid să colaboreze, preţul şi volumul ofertei se aseamănă cu cele de pe piaţa de monopol. Empiric s-a demonstrat însă că pe măsură ce numărul firmelor creşte colaborarea devine tot mai grea.
- În multe situaţii, oligopolurile nu pot ajunge la un echilibru stabil. Interacţiunile strategice pot provoca dezechilibre prin faptul că firmele lansează ameninţări, simulează anumite acţiuni, declanşează războaie de preţuri etc.

Teoria Jocurilor ne ajută să înţelegem mai bine conflictele armate, fenomenele economice şi, de ce nu , viaţa noastră de zi cu zi. Este bine ca o concluzie să reţineţi că, în unele situaţii, cel mai bun lucru pe care îl puteţi face este să va comportaţi într-un mod imprevizibil. Este esenţial ca atunci când sunteţi în postura jucătorului şi vă alegeţi strategia, să ţineţi seama atât de propriile interese cât şi de cele ale adversarului, ştiind că şi el face acelaşi lucru. Când participaţi la un joc, în economie sau oricare alt domeniu de activitate, porniţi de la premisa că adversarul va alege varianta care îl avantajează cel mai mult. Alegeţi-vă apoi strategia astfel încât beneficiul pe care îl veţi obţine să fie maxim, ţinând seama de faptul că adversarul analizează în acelaşi mod opţiunile dumneavoastră.